MA0001 Øving 4

Øystein Tveit

NTNU

Innhold

1 Forberedende oppgaver

$\boxed{1}$ **a)**

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$
$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$
$$a_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}$$

Jeg gjetter at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

b)

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$
$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$
$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$
$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$
$$a_{100} = \frac{100^2}{100+1} = \frac{10000}{101}$$

Jeg gjetter at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

c)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n}{n^2+1} \\
a_1 &= \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5} \\
a_3 &= \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10} \\
a_4 &= \frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{17} \\
a_{100} &= \frac{100}{100^2+1} = \frac{100}{10001}
\end{aligned}
$$

Jeg gjetter at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2 Innleveringsoppgaver

$\boxed{2}$ **a)**

$$\frac{1}{x^2-4}$$

er definert hvor

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &\neq 0 \\ (x+2)(x-2) &\neq 0 \\ x &\notin \{-2, 2\} \end{aligned}$$

Som betyr at definisjonsmengden til uttrykket blir

$$x \in \{\mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$$

b)

$$g(x) = \sqrt{9 - |x-1|}$$

$\sqrt{a}$ er definert for $a \geq 0$. Vi subsituerer a.

$$\begin{aligned} 9 - |x-1| &\geq 0 \\ -|x-1| &\geq -9 \\ |x-1| &\leq 9 \\ -9 \leq x - 1 & \qquad \vee \qquad x - 1 \leq 9 \\ -8 \leq x & \qquad \vee \qquad x \leq 10 \end{aligned}$$

Altså blir definisjonsmengden

$$D_g = [-8, 10]$$

Verdimengden til $\sqrt{a}$ er $[0, \infty)$, som betyr at den minste verdien til $g(x)$ må være 0.
I tillegg vet vi at $|a|$ aldri kan bli mindre enn 0.
Dermed vil den største verdien av $g(x)$ være når $|x-1| = 0$ hvor

$$g(x) = \sqrt{9-0} = \pm 3$$

Ettersom -3 ikke er en del av $[0, \infty)$ blir verdimengden

$$V_g = [0, 3]$$

$\boxed{3}$

$$f(x) = \frac{10}{1+x^2}$$

Ettersom $1 + x^2$ ikke har noen reelle røtter, vil uttrykket være definert for $x \in \mathbb{R}$

Den minste verdien av nevneren $1 + x^2$ vil være når $x = 0$ hvor $1 + x^2 = 1$.
I dette tilfellet blir

$$f(0) = \frac{10}{1 + 0^2} = 10$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 + x^2 = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Dermed blir verdimengden

$$V_f = (0, 10]$$

$\boxed{4}$ $h(x)$ kan skrives som $sgn(x) \cdot x^2$ som videre kan forkortes til

$$h(x) = \frac{|x|}{x} \cdot x^2$$
$$h(x) = |x|x$$

a) Ettersom verdimengden til x^2 originalt var $[0, \infty)$ men at vi flipper funksjonen hvor $x < 0$, så vil verdimengden til h bli

$$V_h = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$
$$V_h = \mathbb{R}$$

b) $h(x)$ er injektiv ettersom vi har vendt retningen på funksjonen akkurat ved det punktet som tidligere var ekstremalpunktet til x^2. Dermed har ikke funksjonen noe ekstremalpunkt lengre, og enhver h-verdi vil kun ha 1 tilsvarende x-verdi.

$h^{-1}(x)$ kan vi skrive som kvadratroten av $|x|$ (ettersom roten av negative tall er udefinert), justert ved 0 med $sgn(x)$. Altså

$$h^{-1}(x) = sgn(x) \cdot \sqrt{|x|}$$

eller

$$h^{-1}(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$$